氏　　　名　王(おう)　海(かい)　泉(せん)
学位(専攻分野)　博　士 (理　学)
学位記番号　理　博　第 1783 号
学位授与の日付　平成 9 年 3 月 24 日
学位授与の要件　学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻　理学研究科数学専攻
学位論文題目　Decomposition of the Canonical Representation of $W(1)\times$ End $[m]$ on $\Lambda(\mathrm{m})$
($\Lambda(m)$ 上の $W(1)\times$End $[m]$ の自然表現の分解)
論文調査委員　(主　査) 教 授 平井　武　教 授 吉田敬之　教 授 渡辺信三

論 文 内 容 の 要 旨

主論文および参考論文において取り扱われている超リー代数とは，1970年代に導入されたもので，通常のリー代数の概念を拡張して，交換関係と同時に反交換関係を取り込んだものである。申請者は，主論文および参考論文において，超リー代数の表現を研究している。ここに於ける研究対象は，いわゆる Cartan 型超リー代数の表現である。より具体的には，次のような問題を取り扱っている。

超リー代数の自然表現をとって，その m 回テンソル積を作り，その既約分解を与えよ，という問題である。この種の問題は，歴史的に見ても古くから研究されてきたものである。例えば，古典的リー群もしくは古典型リー代数，特に一般線形群（一般線形環）の場合に，I. Schur や H. Weyl によって研究されて，周辺への影響をも込めて，大きな成果をもたらした。また，申請者が取り扱っている Cartan 型超リー代数とは，非古典的なリー代数である Cartan 型リー代数の一般化であって，この型の超リー代数の表現論は種々の観点からして興味ある研究対象である。

主論文を含む一連の研究では，4 種類の Cartan 型超リー代数の中の一つである $W(n)$ を考察している。$W(n)$ とは，n 元生成の外積代数 $\Lambda(n)$ の上の超微分全体のなす超リー代数である。この $W(n)$ の $\Lambda(n)$ 上の自然表現を ϕ とする。その m 回テンソル積 ($\phi^{\otimes m}$, $\otimes^m\Lambda(n)$) を既約分解するために，End$(\otimes^m\Lambda(n))$ の中での $\phi^{\otimes m}(W(n))$ の交換代数を考える必要がある。この交換代数 C_m を具体的に決定する問題は，申請者の参考論文において西山享助教授（総合人間学部）との共著の形で解答が与えられている。完全に全ての場合を尽くした訳ではないが，次のような興味ある結果になっている。

整数 1, 2, …, m の集合を $[m]$ で表し，その上の写像全体を End$[m]$ とすると，これは自然に半群となり，その中の群元全体は m 次対称群をなす。半群 End$[m]$ の表現 Φ_m が $\otimes^m\Lambda(n)$ の上に標準的に定義できる。すると，

(*) End$(\otimes^m\Lambda(n))$ において $\Phi_m(\mathrm{End}[m])$ で生成される代数を $\mathcal{E}_m$ とおく。このとき，交換代数 C_m は，$m\leq n$ または $n=1$ の条件の下では，代数 $\mathcal{E}_m$ と一致する。

上記の結果を踏まえて，主論文では，$n=1$ の場合ではあるが，非常に興味ある結果が得られている。そして，一般の n の場合に現れるであろう現象が全て，萌芽ではあるが，現れていると思われる。その意味でも重要な結果である。主要な結果をまとめると，次のようになる。

1．超リー代数 $W(n)$ の既約表現と，代数 $\mathcal{E}_m$ の（従って，半群 End[m]の）既約表現との間の 1-1 対応が与えられている。これは，Weyl-Howe 型の対応と呼び得る。

2．既約ではないが，分解不能（indecomposable）である表現が，２つの代数 $W(n)$，End[m] の双方に現れる。これらを種々調べて，分解不能表現の間の対応に関する詳しい結果が与えられている。

ここで，強調すべきは，取り扱われている２つの代数，$W(n)$ と End[m]とは，いずれも半単純ではなく，分解不能表現が自然に現れてきていること，従って，既約表現だけでは，状況を正確には記述できないことである。これが，取り扱う問題を非常に複雑にしている。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

申請論文に於いて取り扱われる超リー代数は1970年代後半に，数学，理論物理学の双方において，導入されたものである。これは，リー代数の概念を拡張して，交換関係と同時に反交換関係をも取り込んだ代数である。超リー代数の分類は，V. G. Kac により完成され，同時に超リー代数の表現論も始まった。申請者の業績は，この表現論に関するものである。

表現論では，先ず，有限次元既約表現が研究された。特に，最高ウェイト理論と指標公式の研究は多くの研究者の努力で，かなりの結果の集積がある。しかし，テンソル積表現とか，無限次元の表現については，まだわずかの事しか分かっていない。

本申請者は，申請論文に於いて，いわゆる Cartan 型超リー代数の表現を研究している。この代数の自然表現をとって，それの m 回テンソル積を作り，その既約分解を与えようという問題を主として取り扱っている。そこでは，Cartan 型超リー代数 $W(n)$，$S(n)$，$H(n)$ 等の中の最も基本的な系列である $W(n)$ の表現を考察している。この型の超リー代数の表現論は種々の観点からして興味ある研究対象である。

$W(n)$ の $\Lambda(n)$ 上の自然表現 ϕ の m 回テンソル積（$\phi^{\otimes m}$，$\otimes^m\Lambda(n)$）を分解するために，End($\otimes^m\Lambda(n)$) の中での $\phi^{\otimes m}(W(n))$ の交換代数を考える必要がある。この交換代数 C_m は参考論文において，決定されている。

（＊）$\otimes^m\Lambda(n)$ 上の End[m] の自然な表現を Φ_m とし，Φ_m(End[m])がEnd($\otimes^m\Lambda(n)$) において生成する代数を $\mathcal{E}_m$ とするとき，交換代数 C_m は，$m\leq n$ または $n=1$ の条件の下では，代数 $\mathcal{E}_m$ と一致する。

これを踏まえて，主論文では，$n=1$ の場合ではあるが，非常に興味ある結果が得られている。そして，一般の n の場合に現れるであろう現象が全て，萌芽ではあるが，現れていると思われる。その意味でも重要な結果である。主要な結果は，次の二つにまとめられる。

1．超リー代数 $W(n)$ の既約表現と，代数 $\mathcal{E}_m$ の（従って，半群 End[m]の）既約表現との間の 1-1 対応が与えられている。これは，古典的な $GL(n)$ と m 次対称群の場合の一般化であり，Weyl-Howe 型の対応と呼び得る。

2．既約ではないが，分解不能（indecomposable）である表現が，２つの代数 $W(n)$，End[m] の双方

に現れる。これらを種々調べて，分解不能表現の間の対応に関する詳しい結果が与えられている。これは n が一般の場合に対する状況を類推させることもあり，重要な貢献である。

申請論文で取り扱われている２つの代数，超リー代数 $W(n)$ と半群 End[m]とは，いずれも半単純ではなく，自然に，既約ではない分解不能表現が現れてくる。これらの表現の交錯する状況は極めて複雑であり，また，どのように記述すれば良いかも明らかではない。このように，問題を複雑にしている重要なポイントを整理すると，次のようになる。

(1) 分解不能表現が自然にかつ本質的に現れる。従って，既約表現だけでは，状況を正確には記述できない。

(2) 他方，分解不能表現による表現の直和分解は，存在するとは限らない。従って，表現の組成列（composition series）を用いる訳だが，ここには記述の多様性がある。

申請者が，主論文を含む一連の研究で，こうした未開拓の困難な分野において，先駆的業績を上げていることは，高く評価される。また，この方面の研究は，将来的には大きな発展が望まれるところであり，広い範囲の未開拓分野が残されている。申請者の研究はこの方面への進展に対する大きな貢献である。

よって，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心として，これに関連した研究分野についても試問した結果，合格と認めた。